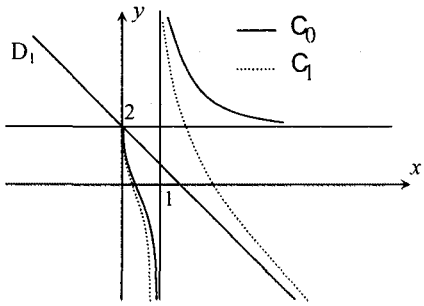
et par suite :

- sur $]0,1[$, C_1 est au dessous de D_1
- sur $]1,+\infty[$, C_1 est au dessus de D_1 .



B) 1°/ φ_n est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, donc φ_n est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\varphi_n(]1,+\infty[) = I_n$.

Or • si $n=0$, $\varphi_0(]1,+\infty[) =]2,+\infty[$

• si $n \neq 0$, $\varphi_0(]1,+\infty[) = \mathbf{R}$.

2°/ Pour $n \neq 0$, φ_n est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent α_n de $]1,+\infty[$ et par suite l'équation $\varphi_n(x)=0$ admet une seule solution $\alpha_n \in]1,+\infty[$.

3°/ $\varphi_n(x)=x \Leftrightarrow \varphi_n(x)-x=0 \Leftrightarrow 2-nx+\dfrac{1}{\ln x}-x=0$

$\Leftrightarrow 2-(n+1)\ x+\dfrac{1}{\ln x}=0 \Leftrightarrow \varphi_{n+1}(x)=0$

or $\varphi_{n+1}(x)=0$ admet une unique solution α_{n+1}.

4°/a) On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n > 1$

pour montrer que $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$, il suffit de prouver que $\varphi_n(\alpha_{n+1}) \geq \varphi_n(\alpha_n)$ car φ_n est décroissante sur $]1,+\infty[$.

On a : $\varphi_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}$, $\varphi_n(\alpha_n) = 0$

On a : $\alpha_{n+1} > 0$ donc $\varphi_n(\alpha_{n+1}) > \varphi_n(\alpha_n)$ d'où $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ et par conséquent la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante.